

Angular Distribution of Rare B meson decay and Long-distance effect

Takuya Morozumi

Hiroshima University

SSI (Sep.1 2016)

Purpose

1. The angular distributions of Rare B meson decay $B \rightarrow K^* l^+ l^-$ is sensitive to various extension of the standard model.
2. There are many observables in the decay modes and some of them are measured by Belle and LHCb.
3. The purpose of my talk is an introduction to the angular distribution of the decay given in a paper.
4. "Azimuthal angle distribution in

$B \rightarrow K^* (\rightarrow K\pi) l^+ l^-$ at low invariant m_{l+l^-} region.” C.S. Kim, Yeong Gyun Kim, Cai-Dian Lu, T.M. Phys.Rev. D62 (2000) 034013.

Contents of this talk

1. Angular distribution of

$$B \rightarrow K^* l^+ l^- \rightarrow K \pi l^+ l^-$$

2. The form factors and the long distance effects

3. Experiments

4. Summary

Angular distribution of $B \rightarrow K^* l^+ l^-$ (1)

In the standard Model, Flavor changing neutral current process such as $b \rightarrow s l^+ l^-$ occurs in one-loop level.

Including the effects of short distance QCD corrections, the decay is parametrized as,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{eff} = & C_9 \bar{s}_L \gamma_\mu b_L \bar{l} \gamma^\mu l \\
 & + C_{10} \bar{s}_L \gamma_\mu b_L \bar{l} \gamma^\mu \gamma_5 l \\
 & - 2i C_{7L} m_b \bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{q^2} b_R \bar{l} \gamma_\mu l \\
 & - 2i C_{7R} m_b \bar{s}_R \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{q^2} b_L \bar{l} \gamma_\mu l
 \end{aligned}$$

$$C_{7R(SM)} = \frac{m_s}{m_b} C_{7L(SM)}$$

Hadronic form factor relevant to the decay

The previous FCNC interaction ($\Delta b = 1$

$\Delta q = 1 (q = d, s)$) leads to rare B meson decays.

$B_q(\bar{b}q) \rightarrow K_q^* l^+ l^-$ ($q = d, u$) and also

$B_s \rightarrow \phi l^+ l^-$.

$$\langle K^{*-} | \bar{s} \gamma_\mu b | B^- \rangle = ig \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon^\nu (p + p')^\lambda (p - p')^\sigma$$

$$\langle K^{*-} | \bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 b | B^- \rangle = f \epsilon_\mu^* + a_+ (\epsilon^* \cdot p) (p + p')_\mu$$

$$+ a_- (\epsilon^* \cdot p) (p - p')$$

g, f, a_+, a_- are form factors and functions of momentum transfer $(p - p')^2$

Another three form factors related to the matrix elements; (g_+, g_-, h) .

$$\langle K^{*-} | \bar{s} \sigma^{\mu\nu} b | B^- \rangle$$

$$\langle K^{*-} | \bar{s} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 b | B^- \rangle$$

Those form factors are calculated using lattice, sumrule, and models.

Angular distributions

The amplitude of the decay

$B \rightarrow K^* (\rightarrow K \pi) l^+ l^-$ are given as,

$$A_R \simeq (\bar{l}_R \gamma^\mu l_R) (a_R g_{\mu\nu} - b_R P_\mu + i c_R \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha L^\beta) \times$$

$$\frac{g^{\nu\alpha} - \frac{P^\nu P^\alpha}{M_{K^*}^2}}{P^2 - m_{K^*}^2 + i\Gamma_{K^*}^* m_{K^*}} (p_K - p_\pi)_\alpha$$

$$A_L \simeq (\bar{l}_L \gamma^\mu l_L) (a_L g_{\mu\nu} - b_L P_\mu + i c_L \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha L^\beta) \times$$

$$\frac{g^{\nu\alpha} - \frac{P^\nu P^\alpha}{M_{K^*}^2}}{P^2 - m_{K^*}^2 + i\Gamma_{K^*}^* m_{K^*}} (p_K - p_\pi)_\alpha$$

$$a_L = -C_{7-}(C_{7R} - C_{7L})[2(P \cdot L) + L^2(g^+ + g^-)] - \frac{(C_9 - C_{10})f}{2m_b} L^2$$

$$b_L = -2C_{7-}(g_+ - L^2 h) + \frac{(C_9 - C_{10})a_+}{m_b} L^2$$

$$c_L = -2(C_{7L} + C_{7R})g_+ + \frac{(C_9 - C_{10})g}{m_b} L^2$$

(a_R, b_R, c_R) are obtained by replacing C_{10} in (a_L, b_L, c_L) with $-C_{10}$

実場で書いた相互作用; $\mathcal{L}_{int.} = \sum_{ijk=1}^3 \frac{A_{ijk}}{3} \phi_i \phi_j \phi_k$

A_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$) 完全対称 ;

$A_{113} = \frac{A_0}{2} + \text{Re.}(A)$	
$A_{223} = \frac{A_0}{2} - \text{Re.}(A)$	
$A_{113} - A_{223} = 2\text{Re.}(A)$	U(1) の破れ
$A_{123} = -\text{Im.}(A)$	U(1) の破れ, CP の破れ
$B^2 \phi^2, \alpha_2 R \phi^2$	U(1) の破れ

オーダーリングに注意してカレントを実場で書く。

$$\begin{aligned}
 j_\mu &= i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi \\
 &= i\frac{1}{2}(\phi_1 - i\phi_2) \overleftrightarrow{\partial}_\mu (\phi_1 + i\phi_2) \\
 &= C\delta_{\mu 0} + \frac{1}{2} \left(\phi_2 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1 - \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2 \right)
 \end{aligned}$$

$C = -\delta^3(0)$ is dropped by redefining the current
 $\langle 0 | J_\mu | 0 \rangle = 0$ for free case.

$$j_\mu = \frac{1}{2} \left(\phi_2 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1 - \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2 \right)$$

電荷（粒子数-反粒子数）に対応する U(1) カレントの期待値系の初期条件を統計的に表す密度演算子を導入して期待値を求める。

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \langle \hat{j}_\mu(x) \rangle = \text{Tr}[j_\mu(x)\rho(0)],$$

$$\text{Tr}[\hat{\phi}_j(y)\hat{\phi}_i(x)\rho(0)] = G_{ij}^{12}(x,y) + \bar{\phi}_i^1(x)\bar{\phi}_j^2(y)$$

Upper indices (1 and 2) corresponds to the two

paths (1 and 2) in closed path time formulation.

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) (G_{12}^{12} - G_{21}^{12})_{x-y} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\bar{\phi}_2^2 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \bar{\phi}_1^1 - \bar{\phi}_1^2 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \bar{\phi}_2^1 \right) \end{aligned}$$

Green 関数を経路積分法で求める 通常使う経路積分との違い

- 初期状態は密度行列で与えられる
- T 積ではない Green 関数

$$G(x^0, y^0) = \text{Tr}[\phi_H(x^0)\rho(0)\phi_H(y^0)]$$

ϕ_H Heisenberg 演算子 :

Green functions; Closed Time Path Formulae

(Introduction) 密度行列を用いた場の時間順序積 (T), 反時間順序積 (\tilde{T}), どちらでもない場合のグリーン関数を計算できる.

$$G^{12}(x, y) = \text{Tr} \hat{\phi}(x) \rho(0) \hat{\phi}(y)$$

$$G^{11}(x, y) = \text{Tr} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \rho(0)$$

$$G^{22}(x, y) = \text{Tr} \rho(0) \tilde{T} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)$$

上で示したグリーン関数経路積分を用いて表すことができる.

Green 関数の生成汎関数 $W[J^a]$

$G(x^0, y^0) = \text{Tr}[\phi_H(x^0)\rho(0)\phi_H(y^0)]$. 2 種類のソース J^a ($a=1,2$) を導入. 完全性関係 $\int d\phi |\phi\rangle\langle\phi| = 1$

$$e^{iW[J^1, J^2]} = \int d\phi d\phi_0^1 d\phi_0^2$$

$$\langle\phi|T \exp\left[i \int_0^\infty dx^0 J^1(x^0)\phi_H(x^0)\right]|\phi_0^1\rangle$$

$$\times \langle\phi_0^1|\rho(0)|\phi_0^2\rangle \leftarrow$$

$$\langle\phi_0^2|\tilde{T} \exp\left[-i \int_0^\infty dy^0 J^2(y^0)\phi_H(y^0)\right]|\phi\rangle$$

2 種類のソースで微分することで 3 種類の Green 関数を生成できる

$$\begin{aligned}
 W[J^1, J^2] &= -i \log \int d\phi d\phi_0^1 d\phi_0^2 \\
 &\langle \phi | T \exp\left[i \int_0^\infty dx^0 J^1(x^0) \phi_H(x^0)\right] | \phi_0^1 \rangle \\
 &\quad \times \langle \phi_0^1 | \rho(0) | \phi_0^2 \rangle \leftarrow \\
 &\langle \phi_0^2 | \tilde{T} \exp\left[-i \int_0^\infty dy^0 J^2(y^0) \phi_H(y^0)\right] | \phi \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W}{\delta J^1(x^0)\delta J^2(y^0)} \Big|_{J_1=J_2=0} &= \int d\phi d\phi_0^1 d\phi_0^2 \\ &\langle \phi | \phi_H(x^0) | \phi_0^1 \rangle \langle \phi_0^1 | \rho(0) | \phi_0^2 \rangle \langle \phi_0^2 | \phi_H(y^0) | \phi \rangle \\ &= \text{Tr}(\phi_H(x^0)\rho(0)\phi_H(y^0)) = G^{12}(x^0, y^0) \end{aligned}$$

となり G^{12} が得られる。

経路積分表示密度行列の汎関数表示

$$\langle \phi_0^1 | \rho(0) | \phi_0^2 \rangle \leftarrow \text{初期密度行列の汎関数表示}$$

ソース J^1 J^2 の下での遷移振幅の経路積分表示

$$\langle \phi | T e^{i \int_0^\infty dx^0 J^1(x^0) \phi_H(x^0)} | \phi_0^1 \rangle =$$

$$\int_{\phi^1(0)=\phi_0^1, \phi^1(\infty)=\phi} d\phi^1(x^0) e^{i \int_0^\infty dx^0 [\mathcal{L}(\phi^1, \dot{\phi}^1) + J^1(x^0) \phi^1(x^0)]}$$

$$\langle \phi_0^2 | \tilde{T} e^{-i \int_0^\infty dx^0 J^2(x^0) \phi_H(x^0)} | \phi \rangle =$$

$$\langle \phi | T e^{i \int_0^\infty dx^0 J^2(x^0) \phi_H(x^0)} | \phi_0^2 \rangle^* =$$

$$\int_{\phi^2(0)=\phi_0^2, \phi^2(\infty)=\phi} d\phi^2(x^0) e^{-i \int_0^\infty dx^0 [\mathcal{L}^*(\phi^2, \dot{\phi}^2) + J^2(x^0) \phi^2(x^0)]}$$

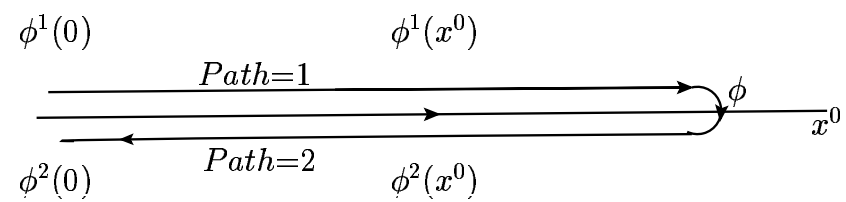
前ページの3つの因子をかけることで経路積分で Green 関数の生成汎関数を表す

$$e^{iW[J^1, J^2]} = \int d\phi_0^1 d\phi_0^2 \langle \phi_0^1 | \rho(0) | \phi_0^2 \rangle \int d\phi$$

$$\int_{\phi^1(0)=\phi_0^1, \phi^1(\infty)=\phi} d\phi^1 e^{i \int_0^\infty dx^0 [\mathcal{L}(\phi^1 \dot{\phi}^1) + J^1(x^0) \phi^1(x^0)]}$$

$$\int_{\phi^2(0)=\phi_0^2, \phi^2(\infty)=\phi} d\phi^2 e^{-i \int_0^\infty dx^0 [\mathcal{L}^*(\phi^2 \dot{\phi}^2) + J^2(x^0) \phi^2(x^0)]}$$

\mathcal{L}^* は \mathcal{L} の複素共役で特に場の理論の場合では $m^2 - i\epsilon$ を $m^2 + i\epsilon$ と置き換える。



場の理論の場合 (Non-equilibrium Field Theory, E.A. Calzetta and B. B.Hu p185)

$$e^{iW[J^1, J^2]} = \int d\phi^1 d\phi^2 e^{i(S[\phi^1] - S^*[\phi^2]) + \int d^4x (J^1 \phi^1 - J^2 \phi^2)} \rho(\phi^1(0), \phi^2(0))$$

この複素共役をとると

$$e^{-iW[J^1, J^2]^*} = \int d\phi^1 d\phi^2 e^{-i(S^*[\phi^1] - S[\phi^2]) - \int d^4x (J^1 \phi^1 - J^2 \phi^2)} \rho(\phi^1(0), \phi^2(0))^*$$

密度演算子 ρ は Hermite だとすると,

$$\langle \phi^1(0) | \rho(0) | \phi^2(0) \rangle^* = \langle \phi^2(0) | \rho(0) | \phi^1(0) \rangle$$

$$\begin{aligned}
& e^{-iW^*[J^1, J^2]} = \\
& \int d\phi^1 d\phi^2 e^{-i(S^*[\phi^1] - S[\phi^2]) - \int d^4x (J^1 \phi^1 - J^2 \phi^2)} \rho(\phi^2(0), \phi^1(0)) \\
& = \int d\phi^1 d\phi^2 e^{-i(S^*[\phi^2] - S[\phi^1]) - \int d^4x (J^1 \phi^2 - J^2 \phi^1)} \rho(\phi^1(0), \phi^2(0)) = \\
& e^{iW[J^2, J^1]}
\end{aligned}$$

よって $W[J^1, J^2]^* = -W[J^2, J^1]$,

$$\frac{\delta W[J^1, J^2]}{dJ^i(x)} = (-1)^{i+1} \phi^i(x) (i = 1, 2)$$

このことから

$$\phi^1(J^1, J^2)^* = \frac{\delta W[J^1, J^2]^*}{dJ^1} = -\frac{\delta W[J^2, J^1]^*}{dJ^1} = \phi^2(J^2, J^1)$$

上付き ϕ^1 ϕ^2 の関係

ソースをゼロにすると $J^1, J^2 \rightarrow 0$

$$\phi^{1*} \Big|_{J=0} = \phi^2 \Big|_{J=0}$$

今までの関係は bilocal なソースがない場合で導出された。この議論を Non-local なソース K がある場合にどう変わるかを見る。→ 2PI CPT formulation $W[J^1, J^2, K]$

bilocal な演算子にカップルするソース $K^{ab}(x, y)$ 導入する。K は対称行列 $K^{ab}(x, y) = K^{ba}(y, x)$ にとれるが以下ではその性質は特に断らない限り使わない。

$$e^{iW[J^1(x), J^2(x)K^{ab}(x, y)]} = \int d\phi^1 d\phi^2$$

$$\exp[i(S[\phi^1] - S^*[\phi^2]) + i \int \int d^4x (J^1 \phi^1 - J^2 \phi^2)$$

$$+ \frac{i}{2} \int \int d^4x d^4y \phi^a(x) c^{ac} K^{cd}(x, y) c^{db} \phi^b(y)]$$

$$\frac{\delta W[J^1, J^2, K^{ab}]}{\delta K^{ab}} = \frac{1}{2} c^{ac} (G^{cd} + \bar{\phi}^c \bar{\phi}^d) c^{db}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-iW[J^1(x), J^2(x)K^{ab}(x,y)]^*} = \int d\phi^1 d\phi^2 \\
& \exp[-i(S^*[\phi^1] - S[\phi^2]) - i \int \int d^4x (J^1 \phi^1 - J^2 \phi^2) - \\
& \frac{i}{2} \int \int d^4x d^4y \phi^a(x) c^{ac} K^{cd*}(x,y) c^{db} \phi^b(y)] \\
& = \int d\phi^1 d\phi^2 \\
& \exp[-i(S^*[\phi^2] - S[\phi^1]) - i \int \int d^4x (J^1 \phi^2 - J^2 \phi^1) - \\
& \frac{i}{2} \int \int d^4x d^4y \phi^a(x) c^{ac} (\tau^1 K^*(x,y) \tau^1)^{cd} c^{db} \phi^b(y)] \\
& = e^{iW[J^2, J^1, -(\tau^1 K^*(x,y) \tau^1)^{ab}]}
\end{aligned}$$

以下 $K'^{ab} = (\tau^1 K^*(x, y) \tau^1)^{ab}$.

$$W[J^1, J^2, K^{ab}(x, y)]^* = -W[J^2, J^1, -(\tau^1 K^*(x, y) \tau^1)^{ab}]$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^1(J^1, J^2, K^{ab})^* &= \frac{\delta W[J^1, J^2, K^{ab}]^*}{\delta J^1} \\ &= -\frac{\delta W[J^2, J^1, -K'^{ab}]}{\delta J^1} \\ &= \bar{\phi}^2(J^2, J^1, -K'^{ab}) \end{aligned}$$

ここで $J_1 = J_2 = 0$ で K^{ab} が次で与えられるときを考える。

$$K^{ab}(x, y) = -i\delta(x^0)\delta(y^0)\kappa^{ab}(x - y)$$

更に κ は実で $\kappa^{11} = \kappa^{22}$ だとする。 $K'^{cd} = -K^{cd}$,

$$\phi^1(0, 0, K^{ab})^* = \phi^2(0, 0, K^{ab})$$

よって上記の性質を満たす Bilocal なソース K に対して $\phi^{1*} = \phi^2$ が成り立つ。

つぎに同じ関係 $-W[J^1, J^2, K]^* = W[J^1, J^2, -K']$ から従う Green 関数の満たす関係調べてみよう。まず Green 関数が次の K での微分で与えられることに注意しよう。

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta W[J^1, J^2, K]^*}{\delta K^{ab*}} \\
&= \frac{1}{2} c^{ac} (G^{cd*}(J^1, J^2, K) + \bar{\phi}^{c*}(J^1, J^2, K) \bar{\phi}^{d*}(J^1, J^2, K)) c^{db} \\
&= \frac{\delta W[J^2, J^1, -K']}{\delta K^{ab*}} = \frac{\delta K'^{cd}}{\delta K^{ab*}} \frac{\delta W[J^2, J^1, -K']}{-\delta K'^{cd}} = \frac{\tau^{1ca} \tau^{1bd}}{2} \times \\
& c^{ce} (G^{ef}(J^2, J^1, -K') + \bar{\phi}^e(J^2, J^1, -K') \bar{\phi}^f(J^2, J^1, -K')) c^{fd} = \\
&= \frac{c^{ac} c^{db}}{2} \left[\tau^{1ce} G^{ef}(J^2, J^1, -K') \tau^{1fd} + \right. \\
& \left. \bar{\phi}^{c*}(J^1, J^2, K) \bar{\phi}^{f*}(J^1, J^2, K) \right]
\end{aligned}$$

$G^{ab}, \bar{\phi}^a$ の複素共役に対する性質.

$$G^{ab*}(J^1, J^2, K) = \tau^{1ac} G^{cd}(J^2, J^1, -K') \tau^{1db}$$

$$\bar{\phi}^{a*}(J^1, J^2, K) = \tau^{1ab} \bar{\phi}^b(J^2, J^1, -K')$$

$$K' = \tau^1 K^* \tau^1$$

特に K が対称で pure imaginary で対角成分が等しいとき。 $-K' = K$ が成り立ち ($K = -i\delta(x^0)\delta(y^0)\kappa$ 我々の場合はこれに該当する)、さらに $J^1 = J^2 = 0$ ならば

$$G^{ab*}(0, 0, K) = \tau^{1ac} G^{cd}(0, 0, K) \tau^{1db}$$

$$\bar{\phi}^{a*}(0, 0, K) = \tau^{1ab} \bar{\phi}^b(0, 0, K)$$

具体的には前ページの関係式は

$$G^{11*}(0, 0, K) = G^{22}(0, 0, K),$$

$$G^{12*}(0, 0, K) = G^{21}(0, 0, K),$$

$$\bar{\phi}^{1*}(0, 0, K) = \bar{\phi}^2(0, 0, K)$$

を意味する。

2 Particle Irreducible (2 PI) Action と Green 関数 $W[J^a, K^{ab}]$ をルジャンドル変換してグリーン関数 G^{ab} と $\bar{\phi}^a$ に対する 2PI 有効作用を作る。(参考文献 Calzetta and Hu, Nonequilibrium Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 2008)

2種類のソース $J(x)$ $K(x, y)$ がある下で Green 関数 ; $G^{ab}(x, y)$ と場の期待値 $\hat{\phi}^a(x)$ を決める方程式が求まる。前者は Schwinger Dyson 方程式 (Green 関数 G を決める方程式)

$$\frac{\delta\Gamma[G, \hat{\phi}]}{\delta G^{ab}(x, y)} = -\frac{1}{2}c^{ac}K^{cd}(x, y)c^{bd}$$

K は初期密度行列を決めれば求まる。

$$K^{ab}(x, y) = -i\delta(x^0)\delta(y^0)\kappa^{ab}(x - y)$$

G^{ab} は T 積 G^{11} 反 T 積 G^{22} を含む 4 種類 ($a, b = 1, 2$).

$$G^{11}(x, y) = Tr[T(\phi(x)\phi(y))\rho(0)],$$

$$G^{12}(x, y) = Tr[\phi(y)\phi(x)\rho(0)]$$

今のモデルでは実スカラー場が 2 種類 $\phi_i(x)$, ($i = 1, 2$) あるので、一般の Green 関数は G_{ij}^{ab} のように 16 種類ある。 (4×4) カレントの計算に必要なのは $G_{12}^{12}(x, y)$ である。詳細は論文に譲るが、空間部分に対するフーリエ変換 $G_{ij}^{ab}(x^0, y^0, \mathbf{k})$ に対する Schwinger Dyson 方程式を求め、初期条件 $G(0, 0, \mathbf{k})$ の下で解くことができる。

まとめに代えて (I) : 研究の現状と今後の研究の流れ

- 相互作用を入れた模型で 2PI 有効作用 $\Gamma[G, \bar{\phi}]$ を導出し、Green 関数の従う Schwinger-Dyson(SD) 方程式や場の期待値 $\bar{\phi}$ の従う運動方程式を求めた。これらを積分方程式の形で表した。
- 相互作用 A_{ijk} が小さいとして、これを摂動として扱い A の一次までの近似で Green や場の期待値を求めた。
- 粒子数-反粒子数非対称性に関するカレントの期待値を相互作用の大きさ A について一次までの近似で求めた。

まとめに代えて (II) : 今後の研究の流れ

- 宇宙の大きさを表すスケールファクター $a(x^0)$ の時間発展を記述するアインシュタイン方程式を3つのスカラー場によるエネルギー運動量テンソルの期待値をソースとして書く。
- 上記のアインシュタイン方程式と場や Green 関数の従う方程式を同時に解くことでどのようなスケール因子の時間依存性を持つ宇宙が実現され、それによって粒子-反粒子非対称度がどのように生成されるかがわかる。