

回転する時空における量子トンネル 効果に基づくHawking輻射

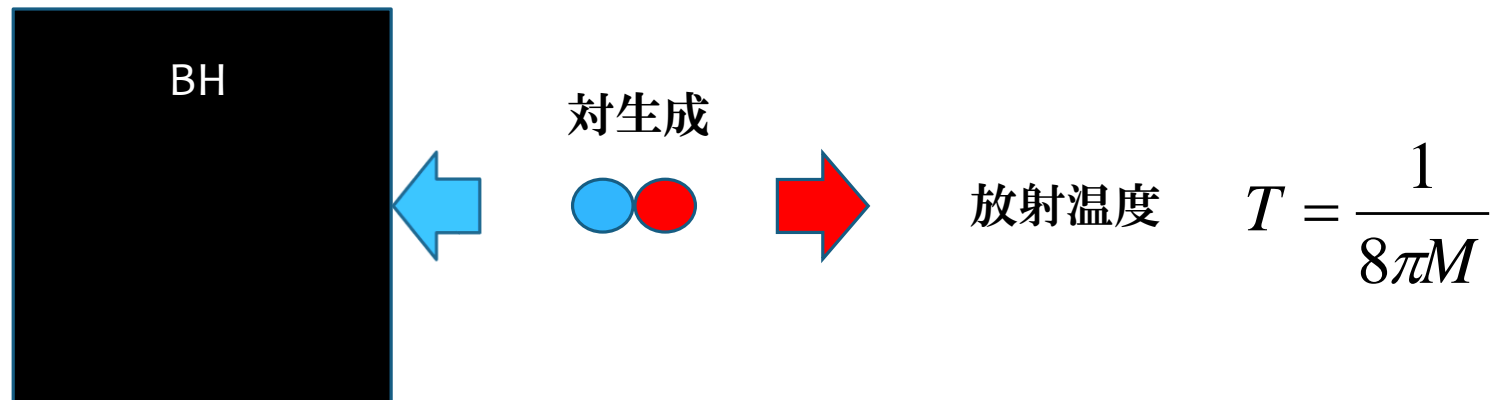
～事象の地平面近傍の次元縮約とその応用について～

山口大学理工学研究科 博士3年
國安 正志

おもに K. Umetsu, Phys. Lett. B 692, 61 (2010). のレビュー

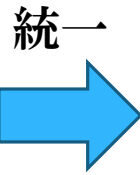
Hawking輻射

- * Hawking(1975); ブラックホールから粒子が放出される
- * そのスペクトルは黒体輻射



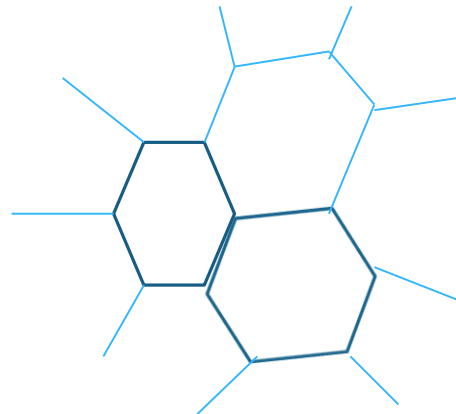
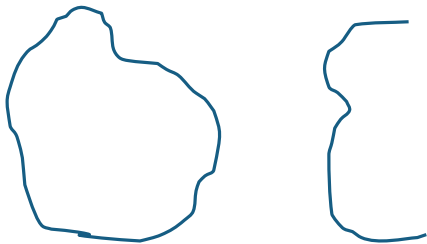
Hawking輻射

- * BH; 一般相対性理論
- * 粒子; 場の量子論



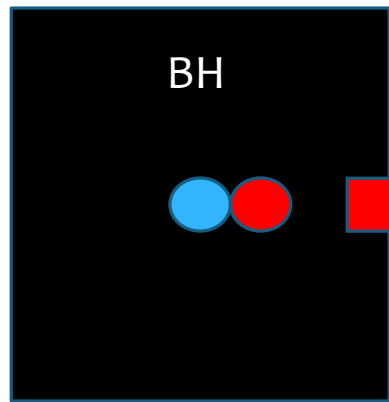
量子重力理論

- * 量子重力理論への足掛かりとなりうる現象



トンネリング機構による説明

* Parikh&Wilczek (2000)



量子トンネル効果で脱出

WKB近似 $\phi \approx e^{iS}$

確率振幅 $\Gamma \equiv |\phi|^2 \approx |e^{iS}|^2$

* 温度 T でのボルツマン因子

$$\Gamma_B = e^{-\frac{\omega}{T}}$$

粒子の作用Sの計算

$$\phi \approx e^{iS}$$

$$\Gamma \equiv |\phi|^2 \approx |e^{iS}|^2$$



Sの虚部だけが効いてくる

- * Parikh&Wilczekの方法

Painleve座標をとって測地線の方程式を解く

- * Hamilton Jacobi法

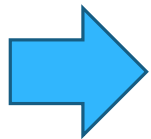
Hamilton Jacobi方程式を解く

- * どちらでもよいが最近では後者が使われることが多い

Schwarzschild時空での計算

$$g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} \right) = 0 \quad \text{HJ方程式}$$

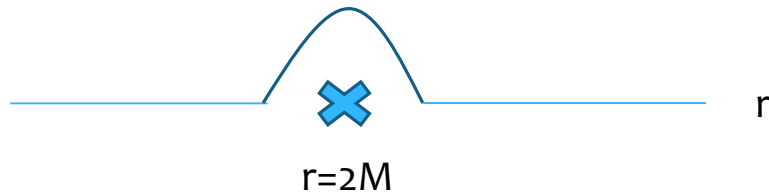
$$S = -\omega t + R(r) \quad \text{ansatz}$$



$$R = \pm \int \omega \frac{dr}{1 - 2M/r}$$

+ ; outgoing

- ; incoming




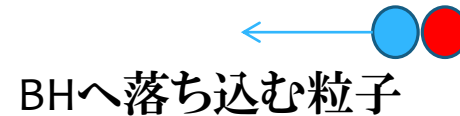
$2M$ に極がある

$$R_{\pm} = \pm 2\pi i M \omega + \xi \quad \xi; \text{定数}$$

Schwarzschild時空での計算

- * in comingは観測されない


$$0 = -2\pi i M \omega + \xi$$
$$\therefore R_+ = 4\pi i M \omega$$



- * 効いてくるのは作用の虚部のみ

$$\text{Im } S = 4\pi M \omega$$

back reaction を取り入れる

- * back reaction による効果を取り入れる

$$\text{Im} S = 4\pi \int_0^\omega M d\omega'$$

- * BHのエネルギーM, 粒子のエネルギー ω

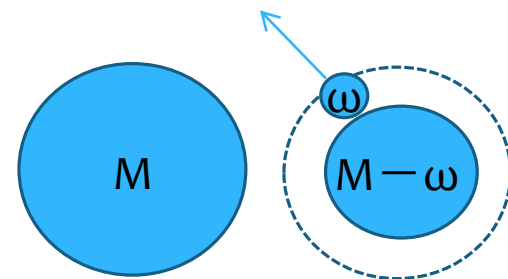
$$\omega' \rightarrow m - \omega'$$

$$\text{Im} S = 4\pi \int_M^{M-\omega} (m - \omega') d(m - \omega')$$

$$= 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right)$$



back reactionによる補正項



Hawking温度

$$\Gamma_B = e^{-\frac{\omega}{T}} \quad \Gamma \cong e^{-2\text{Im}S}$$

$$\text{Im}S = 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right) \approx 4\pi M\omega \quad \omega \ll M$$

$$T = \frac{1}{8\pi M}$$

➡ Hawkingの結果と一致

* ω の2次のオーダーはback reactionによる補正項

一般の4次元BH

* Kerr-Newman-BH

* 質量M, 回転J, 電荷Q

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) dt d\varphi - \frac{a^2 \Delta \sin^2 \theta - (r^2 + a^2)^2}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2$$

$$a \equiv \frac{J}{M} \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$$

* **ホライズン** $\Delta(r_+) = 0$ $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$

innerホライズンも存在するが、Hawking放射の計算ではあまり関係ない

軸対称時空での計算方法

* 複素スカラー場の作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\mu + ieV_\mu)\phi^* (\partial_\nu - ieV_\nu)\phi + S_{\text{int}}$$

$$V_\mu = \left(-\frac{Qr}{r^2 + a^2}, 0, 0, 0 \right) \quad \text{ゲージ場}$$

- * 4次元 (t, r, θ , φ) \rightarrow 2次元 (t, r)
- * ホライズン近傍での現象であることを用いて
2次元の理論へ持っていく

Kerr-Newman時空での作用

$$\phi = \sum_{\ell m} \phi_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$S = \int dt dr d\theta d\varphi \sin \theta \sum_{\ell' m'} \phi_{\ell' m'}^* Y_{\ell' m'}^* \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 - a^2 \sin^2 \theta \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 + 2ima \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) - 2ima \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) - \partial_r \Delta \partial_r + \ell(\ell + 1) - \frac{m^2 a^2}{\Delta} \right] \sum_{\ell m} \phi_{\ell m} Y_{\ell m} + S_{\text{int}}$$

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}$$

$$\hat{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2$$

$$\hat{L}_z Y_{\ell m} = m Y_{\ell m}$$

$$\hat{L}^z = -i \partial_\varphi$$

ℓ ; 方位量子数, m ; 磁気量子数

Kerr-Newman時空での作用

* 変数変換

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \equiv \frac{1}{f(r)}$$

$$S = \int dt dr_* d\theta d\varphi \sin \theta \sum_{\ell m'} \phi_{\ell m'}^* Y_{\ell m'}^* \left[(r^2 + a^2) \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 - f(r) a^2 \sin^2 \theta \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 + 2ima \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) \right. \\ \left. - f(r) 2ima \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) - \partial_{r_*} (r^2 + a^2) \partial_{r_*} + f(r) \ell(\ell + 1) \right. \\ \left. - \frac{m^2 a^2}{r^2 + a^2} \right] \sum_{\ell m} \phi_{\ell m} Y_{\ell m} + S_{\text{int}}$$

ホライズン近傍における作用

- * ホライズン近傍 $r \rightarrow r_+$; $f(r) \rightarrow 0$

$$S = \int dt dr_{r_*} d\theta d\varphi \sin \theta \sum_{\ell'm'} \phi_{\ell'm'}^* Y_{\ell'm'}^* \left[(r^2 + a^2) \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right)^2 + 2ima \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) - 2ima \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} \right) - \partial_{r_*} (r^2 + a^2) \partial_{r_*} - \frac{m^2 a^2}{r^2 + a^2} \right] \sum_{\ell m} \phi_{\ell m} Y_{\ell m}$$

- * S_{int} はホライズン近傍で無視できる
→ ホライズン近傍では高エネルギーだから

S_{int} について

- * 例えば質量項の場合

$$\begin{aligned}\int d^4x \mu^2 \phi^* \phi &= \int dt dr d\theta d\phi \sin \theta (\mu^2 \phi^* \phi) \\ &= \int dt dr_* d\theta d\phi \sin \theta (f(r) \mu^2 \phi^* \phi)\end{aligned}$$

$$\boxed{} \quad f(r) \rightarrow 0$$

- * ただし、動径座標の微分が入る場合はこの限りでない

次元縮約

$$S = -\sum_{\ell m} \int dt dr (r^2 + a^2) \phi_{\ell m}^* \left[-\frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left(\partial_t + \frac{ieQr}{r^2 + a^2} + \frac{ima}{r^2 + a^2} \right)^2 + \partial_r \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \partial_r \right] \phi_{\ell m}$$

* ただし球面調和関数の規格直交条件

$$\int d\theta d\varphi \sin \theta Y_{\ell' m'}^* Y_{\ell m} = \delta_{\ell', \ell} \delta_{m', m}$$

次元縮約した結果

* デイラトン場 $\Phi = r^2 + a^2$

* ゲージ場 $V_t = -\frac{Qr}{r^2 + a^2}$ $U_t = -\frac{a}{r^2 + a^2}$ $V_r = U_r = 0$

* 計量 $g_{tt} = -f(r)$ $g_{rr} = \frac{1}{f(r)}$ $g_{tr} = 0$

の背景における2次元複素スカラー場の理論として解釈できる

ホライズン付近での計量とHJ方程式

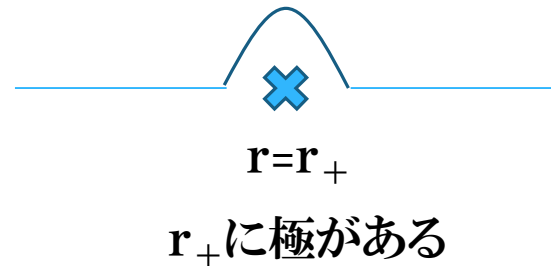
* ホライズン付近での計量

$$f(r) \cong \frac{\Delta_r(r_+)(r-r_+)}{r_+^2 + a^2} \quad \Delta_r(r_+) = 2(r_+ - M)$$

* HJ方程式

$$g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} \right) = 0$$


$$S = -\omega t + R(r)$$



$$\rightarrow R = \pm \int \omega \frac{(r_+^2 + a^2)}{2(r_+ - M)(r - r_+)} dr = \pm \frac{\pi i}{2} \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - M} \omega + \xi$$

Kerr-Newman時空での計算

- * in comingは観測されない


$$0 = -\frac{\pi i}{2} \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - M} \omega + \xi$$

$$\therefore R_+ = \pi i \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - M} \omega$$



BHへ落ち込む粒子

- * 効いてくるのは作用の虚部のみ

$$\text{Im } S = \pi \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - M} \omega$$

back reaction を取り入れる

* back reaction による効果を取り入れる

$$\text{Im } S = 4\pi \int_0^\omega \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - M} d\omega'$$

$$\omega' \rightarrow m - \omega'$$

$$\text{Im } S = \pi \int_M^{M-\omega} \frac{2(m-\omega')^2 + 2(m-\omega')\sqrt{(m-\omega')^2 - a^2 - Q^2} - Q^2}{\sqrt{(m-\omega')^2 - a^2 - Q^2}} d(m-\omega')$$

$$\cong -\pi \left(-\frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - M} \omega + \frac{r_+^3 - 2Ma^2}{4(r_+ - M)^3} \omega^2 \right) + O(\omega^3)$$

Hawking温度

$$\Gamma_B = e^{-\frac{\omega}{T}} \quad \Gamma \cong e^{-2\text{Im}S}$$

$$\text{Im}S \approx \pi \frac{r_+^2 - a^2}{r_+ - M} \omega \quad \omega \ll M$$

$$T = \frac{r_+ - M}{2\pi(r_+^2 + a^2)}$$

➡ Hawkingの結果と一致

* ω の2次のオーダーはback reactionによる補正項

まとめと課題

- * トネリング・メカニズムによるHawking輻射の説明
- * Kerr-Newman-BH (4次元で最も一般的) での計算例
→計算のため、次元縮約を使った
- * 他の時空では有効か？(最近、計算が進んでいる)
- * 高次元ではどうか？